

Т.В. ШМАТКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Розглядається задача про вільні геометрично нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини зі складною формою плану. Математична постановка виконана в рамках класичної теорії тонких пологих оболонок. Для рішення застосовується чисельно-аналітичний підхід, що базується на теорії R-функцій і варіаційних методах. Отримано амплітудно-частотні характеристики для оболонок змінної товщини при різних кутах поворота вісей ортотропії відносно головних вісей.

Рассматривается задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях ортотропных пологих оболочек переменной толщины со сложной формой плана. Математическая постановка выполнена в рамках классической теории тонких пологих оболочек. Для решения применяется численно-аналитический подход, базирующийся на теории R-функций и вариационных методах. Получены амплитудно-частотные характеристики для оболочек переменной толщины при повороте осей ортотропии по отношению к главным осям.

Problem about free geometrically nonlinear vibrations of orthotropic shallow shells with variable thickness and complex plan form is considered. Mathematical statement is carried out within classical framework of thin shallow shells theory. The numerically-analytical approach is applied for solving established task. This method is based on the R-function theory and variational methods. Amplitude and frequency relations were obtained for shells with variable thickness at the rotating axes of orthotropii about main axes.

Введение. Задачи нелинейной динамики пластин и пологих оболочек являются актуальными для многих областей современной промышленности. Особенно это касается космической отрасли, где пластины и оболочки используются как конструктивные элементы для моделирования многих объектов. На практике подобные элементы могут иметь переменную толщину, различную геометрию срединной поверхности и формы плана, способы закрепления и находиться под действием сил, вызывающих их нелинейное деформирование. Исследованием оболочек переменной толщины занимались многие ученые [1, 4, 6, 7, 8]. Однако практически отсутствуют работы, в которых бы рассматривались задачи о колебаниях анизотропных пологих оболочек переменной толщины со сложной формой плана при их геометрически нелинейном деформировании.

В настоящей работе предложен метод решения указанного класса задач с помощью теории R-функций и вариационных методов, т.е. RFM.

Постановка задачи. Задачу о свободных геометрически нелинейных колебаниях анизотропных пологих оболочек переменной толщины $h(x, y)$ будем рассматривать в рамках классической теории, базирующейся на гипотезах Кирхгоффа-Лява [1].

Относительные деформации удлинения и сдвига координатной поверхности $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$ и относительные деформации изгиба и кручения $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$ выражаются с помощью следующих соотношений

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y},$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Усилия $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$ и моменты $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$ в рамках принятых гипотез определяются как

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix},$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Здесь C_{ij}, D_{ij} – приведенные жесткостные коэффициенты, которые являются функциями от x и y , и в случае совпадения главных направлений упругости с направлениями осей координат определяются соотношениями

$$C_{ij} = B_{ij} h(x, y), \quad D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3(x, y)}{12}, \quad i, j = 1, 2, 6; \quad B_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1 \nu_2)};$$

$$B_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad B_{66} = G_{12}; \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{16} = B_{26} = 0.$$

Если же имеет место поворот главных направлений упругости относительно осей координат на некоторый угол θ , то упругие постоянные материала будут зависеть от упругих постоянных B_{ij} в главных направлениях ортотропного тела и могут быть определены с помощью известных формул [1].

Систему уравнений движения оболочки относительно перемещений можно представить в виде [9]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -Nl_1 w + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= -Nl_2 w + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -Nl_3 w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Где линейные дифференциальные операторы L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и нелинейные $N_1(w)$, $N_2(w)$, $N_3(u, v, w)$ для анизотропной оболочки определяются так же, как и в работах [9, 10]. Система (1) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

Метод решения. Для решения поставленной задачи будем использовать подход, предложенный ранее в работах [9, 10] и базирующийся на теории R-функций и вариационных методах. Отличие состоит в том, что жесткостные характеристики являются функциями от координат точки и должны быть вычислены для каждого закона изменения толщины оболочки. Согласно этому подходу необходимо, прежде всего, решить линейную задачу о свободных колебаниях оболочки и найти собственные функции, соответствующие формам колебаний. Тогда для решения нелинейной задачи прогиб пластины представим в виде

$$W = y(t)w^{(c)} \quad (2)$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения нелинейной системы движения (7) и пренебрегая силами инерции в срединной плоскости, получим следующую систему уравнений

$$L_{11}u + L_{12}v + y(t)L_{13}w^{(c)} = -y^2(t)N_1(w^{(c)}(x, y)), \quad (3)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + y(t)L_{23}w^{(c)} = -y^2(t)N_2(w^{(c)}(x, y)).$$

Таким образом, если положить

$$u(x, y, t) = \Delta(y(t)w^{(c)}(x, y)) + y^2(t)u_{11}(x, y), \quad (4)$$

$$v(x, y, t) = \Delta(y(t)v^{(c)}(x, y)) + y^2(t)v_{11}(x, y), \quad (5)$$

где функции $u_{11}(x, y)$, $v_{11}(x, y)$ являются решением системы уравнений типа Ламе

$$L_{11}u_{11} + L_{12}v_{11} = N_1(w^c), \quad (6)$$

$$L_{21}u_{11} + L_{22}v_{11} = N_2(w^c), \quad (7)$$

то первые два уравнения системы (1) будут удовлетворены тождественно. Символ Δ в уравнениях (4)-(5) равен 1 для оболочек и 0 для пластин. Методика решения этих задач с помощью RFM подробно описана в работах [5, 9, 10].

Подставляя выражения (2), (4) – (5) для $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ в третье уравнение системы движения (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\xi''(\tau) + \xi(\tau) + \beta\xi^2(\tau) + \gamma\xi^3(\tau) = 0.$$

Здесь

$$\tau = \omega_L t, \quad \xi = \frac{y(t)}{h};$$

$$\begin{aligned}
\beta = & \frac{-1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left(L_{31} u_{11} + L_{32} v_{11} - k_1 N_{11}^{(N)} \left(w^{(c)} \right) - k_2 N_{22}^{(N)} \left(w^{(c)} \right) + \right. \\
& + \Delta \left(N_{11}^{(L)} \left(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x^2} + 2 N_{12}^{(L)} \left(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \left. + N_{22}^{(L)} \left(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial y^2} \right) \right) w^{(c)} d\Omega, \\
\gamma = & -\frac{1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left(N_{11}^{(Np)} \left(u_{11}, v_{11}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(Np)} \left(u_{11}, v_{11}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. + 2 N_{12}^{(Np)} \left(u_{11}, v_{11}, w^{(c)} \right) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x \partial y} \right) w^{(c)} d\Omega.
\end{aligned}$$

Выражения $N_{ij}^{(N)}$, $N_{ij}^{(L)}$, $N_{ij}^{(Np)}$ обозначают составляющие векторов

$$\vec{N}^{(N)} \left(N_{11}^{(N)}, N_{12}^{(N)}, N_{12}^{(N)} \right), \vec{N}^{(L)} \left(N_{11}^{(L)}, N_{12}^{(L)}, N_{12}^{(L)} \right), \vec{N}^{(Np)} \left(N_{11}^{(Np)}, N_{12}^{(Np)}, N_{12}^{(Np)} \right),$$

которые определяются формулами

$$\vec{N}^{(N)} = C \vec{\varepsilon}^{(N)}, \vec{N}^{(L)} = C \vec{\varepsilon}^{(L)}, \vec{N}^{(Np)} = C \vec{\varepsilon}^{(Np)},$$

где

$$\vec{\varepsilon}^{(L)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} + k_1 w^{(c)} \\ \frac{\partial v^{(c)}}{\partial y} + k_2 w^{(c)} \\ \frac{\partial u^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}^{(N)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}^{(Np)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Для пластин коэффициент $\beta = 0$. Для отыскания амплитудно-частотной характеристики примем, что

$$\xi(\tau) = A \cos \omega_N \tau;$$

тогда после применения метода Бубнова – Галеркина на промежутке, равном четверти периода [2, 3], получим зависимость между максимальной амплитудой колебаний A и отношением нелинейной частоты к линейной $\nu = \omega_N / \omega_L$ в виде [2]:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2}.$$

Численные результаты. Предложенный алгоритм реализован в рамках автоматизированной системы POLE-RL [5]. Входная информация содержит следующие данные: закон изменения толщины оболочки, значения кривизн, логические формулы для плана оболочки, степень полиномов, аппроксимирующих неопределенные компоненты задачи, метод интегрирования. При этом, входная информация может содержать буквенные параметры, что позволяет проводить многовариантные расчеты. Полученные программы были проверены на тестовых задачах и использованы для решения нелинейных задач о колебаниях оболочек переменной толщины. Были проанализированы оболочки различной кривизны, изготовленные из композитных материалов. Их механические параметры и закон изменения толщины рассматривались такими же, как в работах [4, 6], т.е.

$$E_1 = 47.6 \text{ ГПа}, E_2 = 20.7 \text{ ГПа}, G_{12} = 5.31 \text{ ГПа}, \nu_{12} = 0.149$$

$$h = h_0 (1 + \alpha (6x^2 - 6x + 1)),$$

где α – постоянный коэффициент, изменяющийся в интервале $[-0.5; 0.5]$, h_0 – толщина оболочки, соответствующая $\alpha = 0$. Геометрические параметры оболочки следующие: $h_0/a = 0.008$, $b/a = 1$.

В табл.1 представлено сравнение значений безразмерного частотного параметра

$$\Lambda_i = \lambda_i (2a)^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}, \text{ где } D_0 = E_{11} h_0^3 / (12(1 - \nu_{12} \nu_{21}))$$

Таблица 1

Сравнение безразмерного частотного параметра жестко защемленной сферической оболочки с квадратным планом

$k_x = k_y$	Λ_i	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5
0.8	Λ_1	42.89	44.07	45.34	45.83	46.43	47.66	48.94
		42.90	44.09	45.25	45.84	46.44	47.67	48.95
	Λ_2	60.71	60.04	59.31	58.95	58.59	57.96	57.43
		60.79	60.22	59.47	59.1	58.75	58.09	57.56
	Λ_3	61.18	65.19	68.39	69.75	70.96	72.99	74.52
		61.21	65.22	68.42	69.78	70.99	73.01	74.53
	Λ_4	79.04	81.98	84.06	84.84	85.47	86.32	82.38
		79.21	82.14	84.23	84.99	85.63	86.46	83.03
0.32	Λ_1	109.5	111	112.3	112.8	113.2	113.9	114.4
		109.9	111.4	112.6	113.1	113.5	114.2	114.6
	Λ_2	122.8	123.6	123.9	123.9	123.8	123.3	122.5
		122.4	124.3	124.5	124.5	124.4	123.9	122.9
	Λ_3	123.3	126.9	129.2	130	130.8	132.3	133.7
		123.7	127.2	129.9	130.7	131.5	132.9	134.2
	Λ_4	125	127.3	129.8	131.1	132.2	134.1	135.6
		125.8	128.1	129.8	131.1	132.2	134.1	135.6

для сферической оболочки, жестко закрепленной по всему контуру, при различных значениях кривизны и параметра α , характеризующего толщину оболочки, с результатами работы [4], в которой эта задача была сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сплайн-аппроксимации искомого решения. Отклонения не превышают 1.5%, что подтверждает достоверность RFM. Данные работы [4] приведены в табл.1 жирным шрифтом.

В табл.2 приведены аналогичные результаты, полученные с учетом поворота осей ортотропии: $\theta = 30^0, 45^0, 60^0$.

Таблица 2

Значения безразмерного частотного параметра сферической оболочки в зависимости от кривизны, толщины и угла поворота осей ортотропии

θ	$k_x = k_y$	α Λ_i	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5
30	0.08	Λ_1	42.385	43.463	44.437	44.905	45.368	46.287	47.208
		Λ_2	58.544	60.31	60.024	59.762	59.46	58.777	58.032
		Λ_3	60.715	61.768	63.902	64.812	65.608	66.87	67.72
		Λ_4	83.337	85.553	86.717	86.946	86.921	85.883	83.258
	0.32	Λ_1	109.15	110.33	111.09	111.35	111.53	111.7	111.6
		Λ_2	116.98	119.97	122.14	122.94	123.56	124.19	123.99
		Λ_3	126.75	128.25	129.38	129.85	130.28	130.89	130.79
		Λ_4	131.016	131.46	131.42	131.3	131.15	131.03	131.65
45	0.08	Λ_1	42.639	43.508	44.245	44.585	44.913	45.541	46.149
		Λ_2	57.248	59.272	60.474	60.669	60.573	59.851	58.813
		Λ_3	62.793	62.821	62.664	62.702	62.868	63.291	63.524
		Λ_4	84.413	86.484	87.387	87.47	87.324	86.333	84.337
	0.32	Λ_1	109.58	110.52	111.01	111.13	111.18	111.09	110.77
		Λ_2	116.09	118.42	120.05	120.63	121.08	121.57	121.51
		Λ_3	128.83	130.19	131.02	131.31	131.52	131.44	129.95
		Λ_4	134.44	134.52	133.89	133.39	132.8	131.74	131.71
60	0.08	Λ_1	43.821	44.327	44.727	44.905	45.074	45.396	45.709
		Λ_2	56.056	57.932	59.265	59.762	60.151	60.537	59.646
		Λ_3	67.863	66.962	65.604	64.812	63.971	62.268	61.375
		Λ_4	83.829	85.996	86.878	86.946	86.801	85.921	84.297
	0.32	Λ_1	110.707	111.25	111.38	111.35	111.27	111	110.65
		Λ_2	120.46	121.94	122.75	122.94	122.99	122.67	121.76
		Λ_3	127.67	128.89	129.63	129.85	130	129.17	127.44
		Λ_4	131.92	132.29	131.79	131.3	130.68	130.09	129.88

В табл.3 представлены формы колебаний жестко закрепленных сферических оболочек для значений $\alpha = -0.3$, $k_x = k_y = 0.08; 0.32; 0.64$, $\theta = 45^0$.

В табл.4 аналогичные результаты приведены для шарнирно закрепленной полой сферической оболочки с квадратным планом для кривизн

$k_x = k_y = 0.32$ и значений угла $\theta = 0^0, 30^0, 45^0$.

Таблица 3

Формы колебаний сферической оболочки при изменении ее кривизны

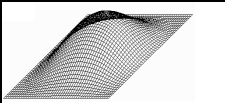
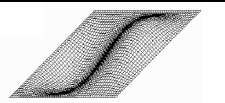
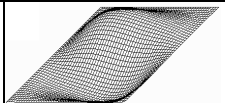
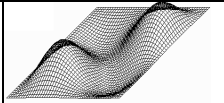
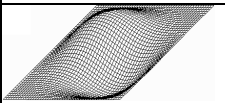
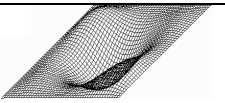
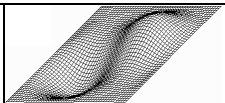
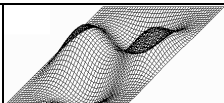
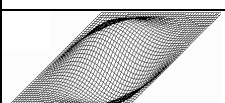
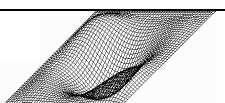
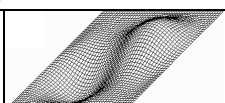
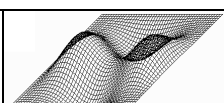
$k_x = k_y = 0.08$			
			
$\Lambda_1 = 43.5086$	$\Lambda_2 = 59.272$	$\Lambda_3 = 62.821$	$\Lambda_4 = 86.484$
$k_x = k_y = 0.32$			
			
$\Lambda_1 = 110.52$	$\Lambda_2 = 118.42$	$\Lambda_3 = 130.19$	$\Lambda_4 = 134.52$
$k_x = k_y = 0.64$			
			
$\Lambda_1 = 192.26$	$\Lambda_2 = 192.839$	$\Lambda_3 = 206.68$	$\Lambda_4 = 215.196$

Таблица 4

Значения безразмерного частотного параметра свободно опертой сферической оболочки в зависимости от толщины и угла поворота осей ортотропии

	$\theta = 0$			$\theta = 30$			$\theta = 45$		
Λ_i	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$
Λ_1	74.94	80.46	85.59	94.59	97.31	97.21	99.11	100.2	100.6
Λ_2	90.14	91.39	91.27	96.49	100.1	104.3	103.8	106.0	107.8
Λ_3	94.25	97.25	97.46	101.4	105.2	108.4	103.8	109.3	112.7
Λ_4	95.53	99.56	104.6	113.9	114.9	115.3	114.6	114.7	114.2

Для рассмотренных оболочек был выполнен нелинейный анализ и получены амплитудно-частотные скелетные кривые. В частности, для жестко защемленных пологих оболочек с квадратной формой плана для различных значений параметра α и геометрических значений

$$h/a = 0.008, \quad k_x = k_y = 0.08, \quad \theta = 45^0$$

были вычислены соответствующие значения ω_N / ω_L в зависимости от W_{\max} / h . Результаты проведенных исследований представлены в табл. 5.

На рис. 1-4 приведены скелетные кривые для шарнирно опертых пологих сферических оболочек переменной толщины.

Таблица 5

Зависимость отношения нелинейной частоты к линейной от амплитуды для сферической оболочки переменной толщины

w/h	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	w/h	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$
0.2	1.063	1.059	1.054	1.2	1.368	1.342	1.315
0.4	1.125	1.116	1.108	1.4	1.428	1.396	1.365
0.6	1.186	1.174	1.161	1.6	1.487	1.451	1.414
0.8	1.247	1.230	1.213	1.8	1.547	1.505	1.463
1.0	1.308	1.286	1.264	2.0	1.606	1.559	1.512

На рис.1-3 изображены амплитудно-частотные зависимости для свободно опертой сферической оболочки при рассмотрении различных углов поворота $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ (для каждого случая были использованы соответствующие полученные значения коэффициентов β и γ). На рис.4 показаны амплитудно-частотные кривые для свободно опертой сферической оболочки при рассмотрении различных значений коэффициента $\alpha = -0.3$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 0.3$ (также учитывались соответствующие полученные значения коэффициентов β и γ для каждого конкретного случая).

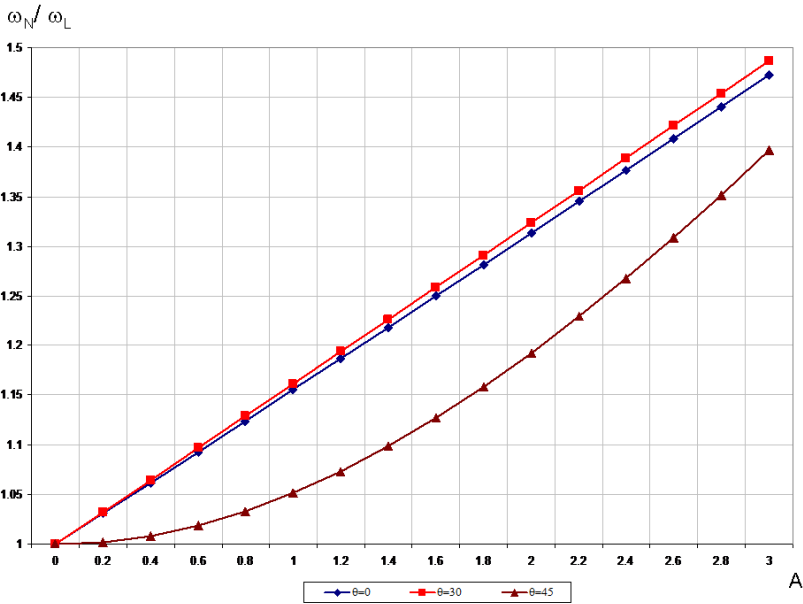


Рисунок 1 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от угла поворота осей ортотропии ($\alpha = -0.3$, $k_x = k_y = 0.32$)

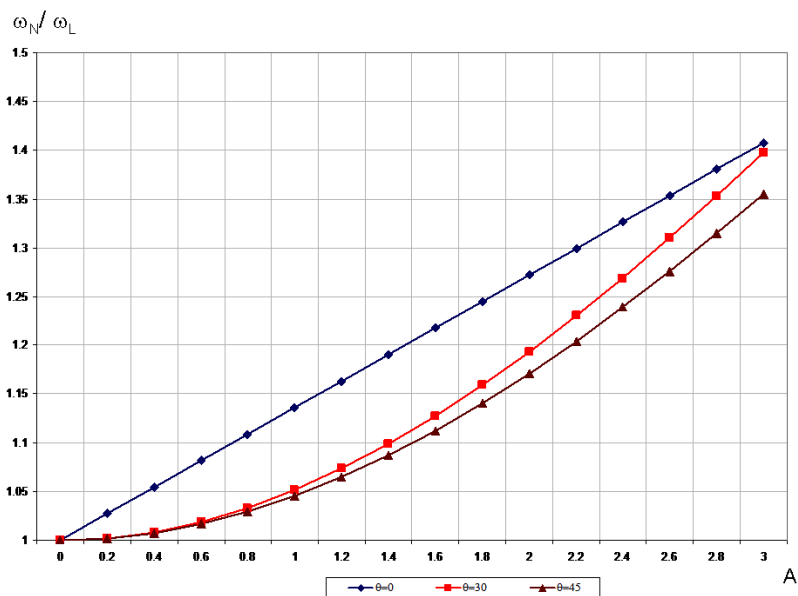


Рисунок 2 – Скелетные кривые для свободно опертой сферической оболочки постоянной толщины ($\alpha = 0$, $k_x = k_y = 0.32$)

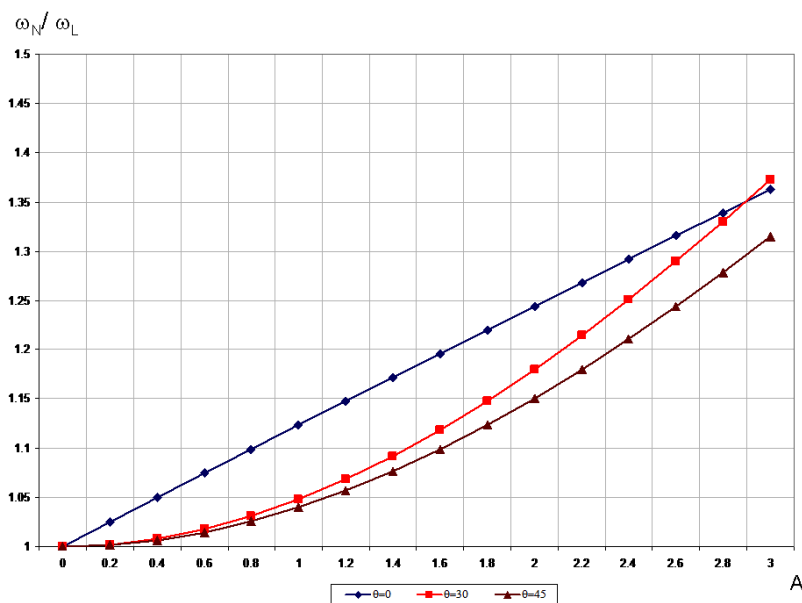


Рисунок 3 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от угла поворота осей ортотропии ($\alpha = 0.3$, $k_x = k_y = 0.32$)

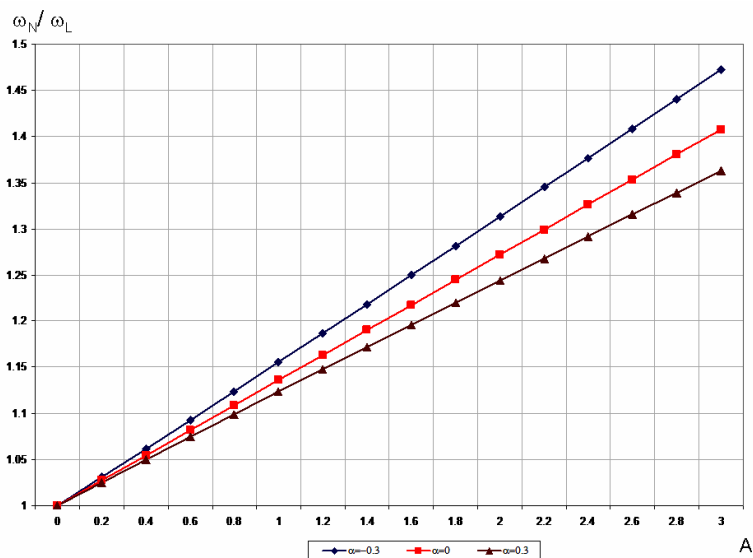


Рисунок 4 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от ее толщины ($\theta = 0$, $k_x = k_y = 0.32$)

Закключение. В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний пологих оболочек переменной толщины. С помощью созданного программного обеспечения в рамках системы POLE-RL исследовано влияние различных механических и геометрических факторов на собственные колебания оболочек переменной толщины. Получены новые результаты для спектра колебаний оболочек переменной толщины при повороте осей ортотропии по отношению к главным осям и амплитудно-частотные характеристики. Предложенный метод может быть использован для пологих оболочек произвольной формы, в том числе и многослойных.

Список литературы. 1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с. 2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 3. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. – Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, № 3. 1955. – С. 33-68. 4. Будаков В.Д., Григоренко А.Я., Пузырев С.В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С.89-99. 5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с. 6. Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 480 с. 7. Ashour A.S. A semi-analytical solution of the flexural vibration of orthotropic plates of variable thickness // Journal of Sound and Vibration. – 2001. – 240, № 3. – P.431-445. 8. Sakiyama T., Huang M. Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – № 216 – P.379-397. 9. Курна Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат.методи та фіз.-мех. поля. 2008. – № 2. – С. 1-11. 10. Курна Л.В., Шматко Т.В. Метод R-функций и «ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову» в задачах нелинейной динамики пластин и пологих оболочек. История НТУ «ХПИ» в выдающихся личностях / Под общ. ред. Л.Л.Товажнянского. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – С.191-227.

Поступила в редколлегию 08.04.2011